Exercices d'oraux.

Posés en 2006 à l’élève Mathias Kende

Mines

Mathématiques

Exercice 1 : Arithmétique

1) Montrer que si a est premier avec n, $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$ où $\varphi(n)$ est la fonction indicatrice d'Euler. En déduire que, si n est premier, $a^n \equiv a[n]$.

2) Montrer que si p est premier, alors : $\forall k \in \{1;2;...;p-1\}$, $p | C_p^k$

3) Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ montrer que si $a^{n-1} \equiv 1[n]$ et $\forall k, (k|n-1) \Rightarrow (a^k \neq 1[n])$ alors n est premier (Test de primalité de Lucas-Lehmer).

Exercice 2 : Analyse

Existence et valeur de la limite de la suite définie par $a_n = \prod_{k=1}^{n} (1+\frac{k}{n})^{1/n}$?

Exercice 3 : Algèbre

Dans $\mathbb{R}^3$ espace vectoriel euclidien, soit s une symétrie et r une rotation. Etudier $s \circ r \circ s$.

Physique

Exercice 1 : Question de cours, mécanique

Mécanique d'un système de deux points matériels isolés : réduction du problème à deux corps à un problème à un corps.

Exercice 2 : Optique, Michelson

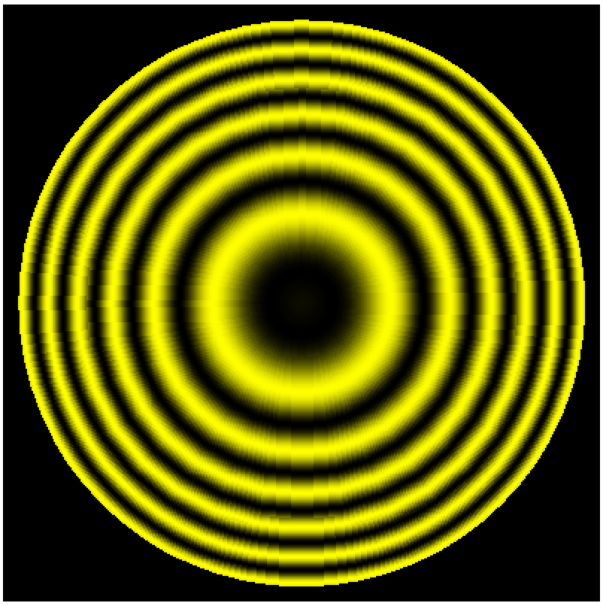
Soit un Michelson réglé en lame d'air dont le parallélisme de la séparatrice et de la compensatrice est parfait, et dont les deux miroirs sont rigoureusement orthogonaux. Le Michelson est éclairé par une source monochromatique de longueur d'onde λ=589 nm, on observe les franges d'interférences dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focal f=0,5 m.

1) A quoi correspond le réglage du Michelson en lame d'air ?

2) Sachant que le rayon du premier anneau clair est r_1=1,70 cm et que celui du deuxième anneau clair est r_2=2,3 cm, déterminer l'épaisseur e de la lame d'air.

3) Sachant que le Michelson est en fait éclairé par le doublet jaune d'une lampe à vapeur de sodium, que ce passe-t-il lorsque l'on augmente e ?

4) Comment peut-on s'assurer du fait que la séparatrice soit bien réglée ? Qu'observerait-on si ce n'était pas le cas ?



ENS

Informatique fondamentale

Soit un ensemble *P* de N personnes. On dispose d'une fonction *connaît : PxP → {vrai, faux}* tel que *connaît(i,j) = vrai* si et seulement si i connaît j. On définit une star comme une personne qui ne connaît personne d'autre dans l'ensemble, mais qui est connu par toutes les autres personnes.

Le but du problème est de trouver un algorithme qui dise s'il existe une star dans *P* et si oui qui en renvoi une. On mesurera la complexité de l'algorithme à l'aide du nombre d'appels à *connaît*.

1) Combien peut-il y avoir de stars dans P.

2) Ecrire un algorithme qui réponde à la question et évaluer sa complexité dans le pire cas.

3) Montrer qu'un algorithme répondant à la question qui ne ferait que 2N-3 appels à *connaît* ne peut pas exister.

4) Déterminer un algorithme de complexité linéaire en N répondant à la question, si ça n'a pas été fait à la question 2).

Mathématiques

Soit $P_1(X) = AX^2 + BX + C$ et $P_2(X) = aX^2 + bX + c$.

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, \left|P_2(x)\right| \leq \left|P_1(x)\right|$ montrer alors que $\left|b^2 - 4ac\right| \leq \left|B^2 - 4AC\right|$.

Centrale

Mathématiques I

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Pour $(x,y)\in E^2$, on note $\langle x|y\rangle$ le produit scalaire usuel de x et y. Pour $((x_1,x_2,...,x_p)$ une famille de p vecteur de E, on pose $G(x_1,x_2,...,x_p)$ la matrice de terme général $a_{ij}=\langle x_i|x_j\rangle$.

1) Soit $(x_1,x_2,...,x_n)$ et $(y_1,y_2,...,y_n)$ deux familles de n vecteurs de E. Montrer que $G(x_1,x_2,...,x_n)=G(y_1,y_2,...,y_n)$ si et seulement si il existe $h\in O(E)$ tel que $\forall i\in[\![1;n]\!], h(x_i)=y_i$.

2) Soit $(x_1,x_2,...,x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

- Les valeurs propres de $G(x_1,x_2,...,x_n)$ sont dans $\{0;1\}$
- Il existe une base orthonormale de E $(e_1,e_2,...,e_n)$ et un projecteur orthogonale p tel que $\forall i, p(e_i)=x_i$.

Physique I

Soit un cylindre de longueur L, de section S, d'axe Oz dans un matériau conducteur de conductivité γ plongé dans un champ magnétique homogène $\vec{B}=B\cos(\omega t)\vec{e_z}$.

1) Calculer le champ $\vec{E}$ en tout point du cylindre.
2) Le cylindre chauffe légèrement, pourquoi ?
3) Calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.
Application numérique : S=40cm² $\gamma=2.10^6 S.m^{-1}$ L=50cm f=50hz B=0.2T
4) Calculer le champ magnétique B_i induit dans le cylindre par le champ E.

Physique II

Ceci est le système optique d'un appareil photographique réflexe.

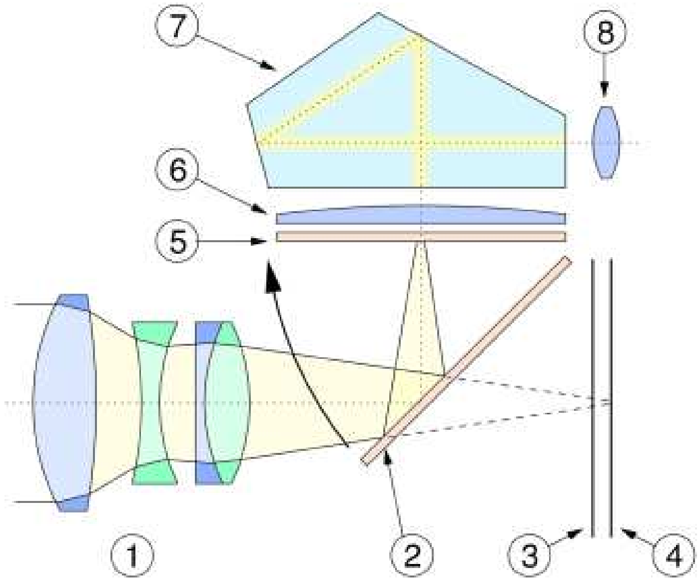
1) Donner une contrainte sur la forme du prisme pour que les rayons qui entre par la face inférieure avec un angle d'incidence i ressortent avec le même angle parla face droite.

2) A quoi servent les lentilles 6 et 8 (le dessin est inutilement compliqué, vous pouvez négliger les lentilles 3 et 5).

3) Comment faut-il placer la lentille 8 pour que l'utilisateur voit à l'infini un objet dans le plan focal de l'objectif.

4) A quoi peuvent servir les lentille 3, 5 et 6 ?

5) Inventer d'autre question et y répondre.



Chimie

Ma mémoire me fait brusquement défaut, et je ne me souviens plus du tout de l'exercice. Je sais seulement qu'il y était question de potentiels chimiques, de réactions redox, etc.